トポロジカルな欠陥の運動(固体中の欠陥,基研短期研究会「トポロジーの物理への応用」報告,研究会報告)

北原, 和夫

連続的に移行する過程があることを示している。言いかえると，トポロジカルに安定な点欠陥のエネルギー安定性は必ずしも保証されていない。実際，ネマティック液晶のひずみエネルギーを環欠陥の半径でプロットしてみると，有限の半径で最小になり（図3実線）[7]，これは実験的にも示唆されている[8]。

参考文献

1) N. D. Mermin, Rev. Mod. Phys. **51** (1976) 591.
2) L. Michel, Rev. Mod. Phys. **52** (1980) 617.
3) V. P. Mineev, Sov. Sci. Rev. **A2** (1980) 173.
4) H. R. Trebin, Adv. Phys. **31** (1982) 195.
5) H. Nakanishi, K. Hayashi, and H. Mori, to be published in Commun. Math. Phys.
6) See Sec. IIB of 1).
7) H. Mori and H. Nakanishi, Submitted in J. Phys. Soc. Jpn.
8) D. Melzer and F.R.N. Nabarro. Phil. Mag. **35** (1977) 907.

トポロジカルな欠陥の運動

東工大・理　北　原　和　夫

I. 序　論

欠陥を含む媒質の変形を扱う場合，完全結晶から出発して物体の変形を変位ベクトル$\vec{u}$で表現する。近接する2点$\vec{x}$と$\vec{x}+d\vec{x}$の変位の差$d\vec{u}$より歪み$w_{ik}=\partial u_k/\partial x^i$を定義する。しかしながら，このような歪みを用いた記述が可能なのは完全結晶と変形媒質との間に大域的な一対一対応がある場合に限られる。

転位や回位を含む変形媒質では，局所的には完全結晶との対応はあるが大域的にはない。この微分幾何学的な扱いについては昨年の研究会で述べた。第Ⅱ章でその復習をし，第Ⅲ章以下で変形媒質の運動方程式を導く。Dzyaloshinskii-Volovick[1]に従って変形媒質の場に対する正準方程式を導く。

Ⅱ. 変形媒質の幾何学

変形した媒質中の一点Pにおいて歪んだ結晶軸が存在するとして，それらを$\hat{e}_\alpha$（$\alpha=1,2,3$）であらわす。$\hat{e}_\alpha$は隣りあう原子間の相対位置を表すものと考えればよい。局所的な伸び縮みがあれば完全結晶の場合と較べて$\hat{e}_\alpha$は歪んでいる。外の実験室に固定したデカルト座標軸$\hat{u}_i$（$i=x,y,z$）によって媒質内の点Pの位置を

$$\vec{x}=x^i\hat{u}_i \tag{1}$$

とあらわす。局所的な座標軸 $\hat{e}_\alpha$ との間に

$$\hat{u}_i = W_{i\alpha} \hat{e}_\alpha \tag{2}$$

という関係を与える。$W_{i\alpha}$ は点Pによる。行列 $W_{i\alpha}$ を

$$W_{i\alpha} = S_{ij} R_{j\alpha} \tag{3}$$

と表す。$R_{j\alpha}$ は直交行列で $\hat{e}_\alpha$ が回転について任意性をもつことに対応する。不変量としての距離は，次のようにして定義される。ある変位 $d\vec{x}$ を

$$d\vec{x} = dx^i \hat{u}_i = d\xi^\alpha \hat{e}_\alpha \tag{4}$$

とあらわすと,

$$d\xi^\alpha = dx^i W_{i\alpha} \tag{5}$$

$\sqrt{(d\xi^\alpha)^2}$ は $d\vec{x}$ の中にある原子の数に対応するので，これを距離と定義する。

$$(ds)^2 = (d\xi^\alpha)^2 = dx^i dx^j g_{ij} \tag{6}$$

ここで

$$g_{ij} = S_{ik} S_{jk} . \tag{7}$$

一般に直交行列 $R_{j\alpha}$ は $\vec{x}$ の多価関数となるが回位がないときはこれを導入する必要はない。接続の係数を

$$\Gamma_{jk}^{n} = \frac{\partial W_{k\alpha}}{\partial x^j} (W^{-1})_{\alpha n} \tag{8}$$

で定義すると，局所的な座標軸 $\hat{e}_\alpha$ に沿っての運動は測地線方程式

$$d^2 x^n + \Gamma_{jk}^{n} dx^j dx^k = 0 \tag{9}$$

で与えられる。[$d^2\xi^\alpha = 0$ に対応する。]

このようにして，転位を含む媒質は $W_{i\alpha}$，Γ_{jk}^{n} などで特徴づけられる。

Ⅲ. Poisson 括弧

一般に変形体 (deformable body) の局所的な変位を $u^k(\vec{x})$ とすると，これに正準共役な運動量 $p_k(\vec{x})$ と任意の場 $G(\vec{y})$ との間に

$$\{ p_k(\vec{x}),\ G(\vec{y}) \} = -\delta G(\vec{y}) / \delta u^k(\vec{x}) \tag{10}$$

という関係がある。{　,　} は Poisson 括弧である。系全体のエネルギー H が与えられると，任意の場

の運動方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} G(\vec{x}) = \{ G(\vec{x}) , H \} \tag{11}$$

で与えられる。以下に $\{ p_k(\vec{x}), G(\vec{y}) \}$ の例を示す。

(i) $G(\vec{x})$ がスカラー場のとき：

座標変換 $x^k \to x'^k = x^k + u^k(\vec{x})$ に対して

$$G(x)\, d^3x = G'(x')\, d^3x' \tag{12}$$

$d^3x' = d^3x\,(1 + \operatorname{div}\vec{u})$, $G' = G + \delta G$ とおくと

$$\delta G(\vec{x}) = -\frac{\partial G}{\partial x^k} u^k(\vec{x}) - G(\vec{x}) \operatorname{div} \vec{u}(\vec{x}). \tag{13}$$

よって

$$\delta G(\vec{y}) / \delta u^k(\vec{x}) = G(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial x^k} \delta(\vec{x} - \vec{y}). \tag{14}$$

(ii) $G_k(\vec{x})$ が共変ベクトル場のとき：

$$G_k(\vec{x})\, d^3x = G'_\ell(\vec{x}')\, d^3x' \frac{\partial x'^\ell}{\partial x^k} \tag{15}$$

上と同様にして次式が得られる。

$$\begin{aligned} &\delta G_k(\vec{y}) / \delta u^\ell(\vec{x}) \\ &= G_k(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial x^\ell} \delta(\vec{x} - \vec{y}) - G_\ell(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial y^k} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \tag{16}$$

(iii) $G^k(\vec{x})$ が反変ベクトル場のとき：

$$G^k(\vec{x}) \frac{\partial x'^\ell}{\partial x^k} d^3x = G'^\ell(\vec{x}')\, d^3x' \tag{17}$$

これより

$$\begin{aligned} &\delta G^\ell(\vec{y}) / \delta u^k(\vec{x}) \\ &= G^m(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial y^m} \delta(\vec{x} - \vec{y})\, \delta_{\ell k} + G^\ell(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial x^k} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \tag{18}$$

(iv) 計量テンソル $g_{ij}(\vec{x})$ に対しては

$$g_{ij}(\vec{x}) = g'_{k\ell}(\vec{x}') \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \frac{\partial x'^\ell}{\partial x^j} \tag{19}$$

より

$$\delta g_{ij}(\vec{y})/\delta u^k(\vec{x}) = -\frac{\partial g_{ij}(\vec{y})}{\partial y^k}\delta(\vec{x}-\vec{y})$$
$$- g_{kj}(\vec{y})\frac{\partial}{\partial y^i}\delta(\vec{x}-\vec{y})$$
$$- g_{ik}(\vec{y})\frac{\partial}{\partial y^j}\delta(\vec{x}-\vec{y}) \qquad (20)$$

接続の係数についても同様にしてPoisson括弧の表式が得られる。

Ⅳ. 運動方程式

散逸過程を含まない理想的な媒質については，

$$\frac{\partial}{\partial t}p_k(\vec{x}) = \{ p_k, H \}$$
$$= \int d\vec{y}\, \{ p_k(\vec{x}), \varepsilon(\vec{y}) \} \qquad (21)$$

ここで $\varepsilon(\vec{y})$ はエネルギー密度であるが，熱力学により

$$d\varepsilon = v^k dp_k + \mu d\rho + T ds + \sigma_{k\alpha} dW_{k\alpha} \qquad (22)$$

と表わされる。v^k は流速場，μ は化学ポテンシャル，ρ は密度，T は温度，s はエントロピー密度，$\sigma_{k\alpha}$ は応力テンソルである。これより，

$$\frac{\partial}{\partial t}p_k(\vec{x}) = \int d\vec{y}\, \{ p_k(\vec{x}), p_l(\vec{y}) \}\, v^l(\vec{y})$$
$$+ \int d\vec{y}\, \{ p_k(\vec{x}), \rho(\vec{y}) \}\, \mu(\vec{y})$$
$$+ \int d\vec{y}\, \{ p_k(\vec{x}), s(\vec{y}) \}\, T(\vec{y})$$
$$+ \int d\vec{y}\, \{ p_k(\vec{x}), W_{l\alpha}(\vec{y}) \}\, \sigma_{l\alpha}(\vec{y}) \qquad (23)$$

となる。エントロピー密度と質量密度はスカラー量であるとする。また $W_{k\alpha}$ はkについて共変ベクトルである。よって，運動量保存則

$$\frac{\partial}{\partial t}p_k + \frac{\partial}{\partial x^l}[P\delta_{kl} + p_k v^l + W_{k\alpha}\sigma_{l\alpha}] = 0 \qquad (24)$$

が得られる。同様にして，

$$\frac{\partial}{\partial t}W_{k\alpha} + v^l\frac{\partial}{\partial x^l}W_{k\alpha} + W_{l\alpha}\frac{\partial}{\partial x^k}v^l = 0 \qquad (25)$$

が得られる。

V. 問題点

上で定義した応力テンソルは通常のものと異なる。歪みテンソル $w_{ik} = \partial u^k / \partial x^i$ と $W_{i\alpha}$ との間には近似的に

$$W_{i\alpha} = \delta_{i\alpha} - w_{i\alpha} \tag{26}$$

よって

$$g_{ij} \fallingdotseq \delta_{ij} - (w_{ij} + w_{ji}) \equiv \delta_{ij} - 2\varepsilon_{ij} \tag{27}$$

ε_{ij} は通常用いられる歪テンソル（対称化された）であり，[2]

$$\sigma_{ij} = \lambda_{ijk\ell}\, \varepsilon_{k\ell} \tag{28}$$

とおくのが普通である。そしてエネルギーは $\varepsilon_{k\ell}$ の関数とする。この考え方からすると，弾性エネルギーは $W_{i\alpha}$ でなくむしろ g_{ij} の関数とすべきかも知れない。

また，不可逆過程をどのようにしてとり入れるかも今後残された問題である。

文　献

[1] I. E. Dzyaloshinskii and G. E. Volovick, Ann. Phys. **125** (1980) 67.

[2] S. Amari, "A Dualistic Treatment of Non-Riemannian Material Spaces" RAAG Research Note No. 125 (1968)

「スピングラス」

東大・理　鈴　木　増　雄

スピングラス[1-6]とは何かという説明から始まって，その本質であるフラストレーションと非線形帯磁率の負の発散について解説し，これらをトポロジカルな概念によって理解する方法を述べ，最後に，筆者によって提唱された「コヒーレント異常法」[7-21]と「有効場理論」[22,23]によって，スピングラスの相転移が統計力学的に研究できることを示した。

1. スピングラスとフラストレーション

金に少量の鉄を混ぜた合金，銅に少量のマンガンを混ぜた合金などでは，スピンを持った鉄やマンガンの不純物がランダムに分布しており，RKKY相互作用という正負に振動した相互作用のために，不純物間の相互作用がランダムになり，スピン間には，強磁性的な力と反強磁性的な力が働き，フラストレーシ